Concours d'Admission 1974

Deux pages dactylographiées

SUJET OPTION P'

MATHEMATIQUES II

Les parties II et III sont indépendantes.

I

On considère, dans cette partie I, l'ensemble (A) des matrices R, à coefficients réels de la forme :

$$R = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

et qui sont des matrices de rotation, dans un espace vectoriel euclidien (V), rapporté à une base orthonormée : $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1 - A quelles conditions nécessaires et suffisantes a, b, c doivent-ils satisfaire ?

2 - Montrer que les conditions trouvées sont équivalentes aux suivantes :

a, b, c sont les racines d'une équation : $E(u) = 0$, avec :

$$E(u) = u^3 - u^2 + p \quad \text{et} \quad 0 \leqslant p \leqslant \frac{4}{27}.$$

p est ainsi choisi dans tout ce qui suit.

A une valeur de p, combien correspond-il de matrices R distinctes ?

3 - Soit $\vec{U}$ le vecteur ayant pour composantes : $(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$; quelle est l'image de $\vec{U}$ par la rotation de matrice R ?

En déduire que l'ensemble (A) a, pour la multiplication, une structure de groupe commutatif.

4 - Quel est le cosinus de l'angle de la rotation définie par une matrice R ?

Vérifier que les racines de $E(u) = 0$ sont dans un intervalle convenable.

5 - Dans le cas $p = 0$, on désigne par R' et R'' les matrices associées, différentes de la matrice unité ; quels sont les angles de rotations définies par R' et R'' ?

Dans le cas : $p = \frac{4}{27}$, quels sont les angles des rotations associées ?

6 - Dans cette question, p est tel de sorte que a, b, c soient distincts. Comparer la rotation définie par R avec celle définie par la transposée de R ; effectuer les produits R'.R et R''.R ; R' et R'' ont été définies en 5°.

Déduire des résultats obtenus la valeur des angles des rotations associées à une valeur de p, en fonction de l'un de ces angles, noté θ.

Calculer p en fonction de $\cos\frac{\theta}{2}$.

II

On considère, dans cette partie II, l'ensemble (B) des matrices Q, à coefficients réels, de la forme :

$$Q = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

... Suite page 2 ...

et qui transforment la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace vectoriel euclidien (V) en une base orthonormée de sens différent, Q étant écrite dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1 - Montrer qu'il est nécessaire et suffisant que a, b, c vérifient les conditions du I-

2 - Montrer que la transformation associée à la matrice Q est une symétrie par rapport à un plan vectoriel ; on ne demande pas de déterminer ce plan.

3 - Dans le cas : $p = 0$, déterminer les plans des symétries définies par les matrices associées. On désigne par Q' l'une de ces matrices.

4 - Dans cette question, p est fixé de telle sorte que a, b, c soient distincts. Soit Q une matrice associée à cette valeur de p ; de l'expression de Q'.Q et des résultats du I-6, déduire la disposition des plans des symétries définies par les matrices de (E) associées à une valeur de p.

5 - On considère un espace affine E associé à l'espace vectoriel (V) ; E est rapporté au repère : $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dessiner, dans un plan perpendiculaire au vecteur $\vec{U}$ défini en I-3 :

a) les traces des plans des symétries définies à la question II-3 ;

b) les traces des plans des symétries associées à la valeur $p = \frac{4}{27}$;

c) les traces des plans des symétries définies au II-4.

Déterminer p tel que les traces des plans des symétries définies au II-4 puissent se déduire de l'une d'elles par itération d'une rotation ρ à préciser ; quelles sont les matrices de (A) associées aux rotations ρ trouvées ?

III

Relativement au repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un solide S est en mouvement ; à S est lié le repère $(A ; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ tel que : $\overrightarrow{OA} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$;

$\vec{I} = a\vec{i} + c\vec{j} + b\vec{k}$; $\vec{J} = b\vec{i} + a\vec{j} + c\vec{k}$; $\vec{K} = c\vec{i} + b\vec{j} + a\vec{k}$;

avec : $a = \frac{1}{3}(2\cos t + 1)$, $b = \frac{1}{3}\left[2\cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) + 1\right]$, $c = \frac{1}{3}\left[2\cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) + 1\right]$;

t désigne le temps.

Déterminer, à l'instant t, le vecteur rotation instantanée ; vérifier que la vitesse de translation est nulle ; déterminer l'axe central du torseur des vitesses.

Caractériser les surfaces engendrées par l'axe central, quand t varie, relativement au repère fixe et relativement au repère mobile.

F I N

ooooo

ooo

o

SUJET OPTION P'

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail